Додаток до листа
Інституту модернізації змісту освіти
від ____________ № ____________

**Міністерство освіти і науки України**
**Інститут модернізації змісту освіти**

# XIX ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

## Завдання для відбіркових етапів турніру*

Дорогі друзі — юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов’язково повинні бути розв’язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв’язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної стратегії, оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру (нехтування ж можливостями узагальнення інколи призводить до втрати балів). Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

### 1. «Спільний ортоцентр»

На гіпотенузі $AB$ прямокутного трикутника $ABC$ відмітили точки $K$ і $N$. Доведіть, що ортоцентри трикутників $BCK$ і $ACN$ збігаються тоді й тільки тоді, коли $\frac{BN}{AK} = \operatorname{tg}^2 A$.

### 2. «Сума послідовних чисел Фібоначчі»

Послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, в якій $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \geqslant 2$, називається послідовністю чисел Фібоначчі. Які ви зможете знайти натуральні числа $m > 1$ такі, що сума будь-яких $m$ послідовних чисел Фібоначчі ділиться без остачі на $m$?

*За цими задачами будуть проведені чвертьфінальні та півфінальні бої фінального етапу XIX Всеукраїнського турніру юних математиків. Для проведення міжшкільних, районних, міських та обласних етапів турніру відповідні журі й оргкомітети можуть частково змінювати запропонований перелік задач.

## 3. «Видовищність турніру»

У футбольному турнірі «на виліт» грає $2^n$ команд з рівнями гри, позначеними натуральними числами від 1 до $2^n$ (усі команди мають різний рівень гри; матч між двома командами завжди виграє команда з більшим рівнем гри). Спершу команди розбивають на $2^{n-1}$ пар, і ці пари грають між собою, потім $2^{n-1}$ переможців розбивають на $2^{n-2}$ пар, які грають між собою, і т. д., поки не залишиться лише одна команда — переможець турніру. *Видовищністю матчу* між двома командами назвемо модуль різниці рівнів цих команд, *видовищністю турніру* назвемо суму видовищностей усіх проведених ігор. Для заданого натурального $n \geqslant 2$ знайдіть найменше та найбільше можливе значення видовищності турніру.

## 4. «Хокей на Олімпійських іграх»

Нехай $n$ — задане натуральне число. У хокейних змаганнях на Олімпійських іграх бере участь $2n$ команд, які розігрують між собою турнір в одне коло (кожна команда з кожною грає по одному матчу). За перемогу в основний час команді присуджують 3 очки, за перемогу в додатковий час — 2 очки, за поразку в додатковий час — 1 очко, а за поразку в основний час команда отримує 0 очок.

4.1. Яку найменшу кількість очок може набрати команда-переможець турніру?

4.2. Яку найбільшу кількість очок може набрати команда, що посіла останнє місце?

## 5. «Функціональна нерівність»

Нехай $n \geqslant 2$ — натуральне число. Чи існує набір ненульових дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ з такою властивістю: якщо функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для будь-яких дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задовольняє нерівність

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f\left(x_i + x_j\right) \geqslant \frac{n(n-1)}{2} f\left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n\right),$$

то вона є сталою?

## 6. «Деформовані числа»

Назвемо натуральне число *таким, що деформується*, якщо його запис у заданій системі числення не закінчується нулем та в цьому записі можна викреслити цифру, яка не є ані першою, ані останньою, так, щоб початкове число без остачі ділилося на отримане число.

6.1. В яких системах числення немає чисел, що деформуються?

6.2. Чи існує така система числення, в якій безліч чисел, що деформуються?

6.3. Чи існує таке число, яке в десятковій системі числення можна деформувати двічі поспіль?

## 7. «Точки на прямій»

Андрійко та Миколка грають у таку гру. Андрійко вибирає 2016 точок на проміжку $(0; +\infty)$. Миколка довільно фарбує кожну з них синім або зеленим кольором. Після цього Андрійко вибирає додатне число $a$ і фарбує всі проміжки $((2n-2)a;\ (2n-1)a)$, $n \in \mathbb{N}$, у синій колір, а всі проміжки $((2n-1)a;\ 2na)$, $n \in \mathbb{N}$, — у зелений. Якщо кожна з вибраних на початку гри Андрійком точок належатиме інтервалу такого ж самого кольору, то Андрійко вважатиметься переможцем. В іншому випадку переможцем буде Миколка. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу?

## 8. «Оцінки для кількості розв'язків»

Нехай $n \geqslant 2$ — задане натуральне число. Позначимо через $A_n$ кількість розв'язків у натуральних числах рівняння $x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n^2$. Доведіть, що має місце нерівність

$$\frac{n^n(n-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n!)^2} < A_n < \frac{n^{2n-1}}{(n!)^2}$$

$(1! = 1;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ n \geqslant 2)$.

## 9. «Показникове рівняння в натуральних числах»

Розв'яжіть у натуральних числах $x$, $y$ і $z$ рівняння $1 + 2^x + 2^{x+y} = 5^z$.

## 10. «Рівняння з коренями»

Розв'яжіть у цілих числах $x$ і $y$ рівняння $\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = \sqrt[3]{13x + 8}$.

## 11. «Рівняння з цілою частиною»

Розв'яжіть у цілих числах $x$ і $y$ рівняння

$$\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2}\right] = 1 + x - y$$

(тут $[a]$ — ціла частина числа $a$, тобто найбільше ціле число, що не перевищує $a$).

## 12. «Числова таблиця»

Чи можна заповнити цілими числами таблицю $6 \times 6$ так, щоб сума всіх чисел у кожному квадраті $3 \times 3$ цієї таблиці дорівнювала 2016, а сума всіх чисел у кожному квадраті $5 \times 5$ дорівнювала 2015?

Таке ж саме питання для таблиці $7 \times 7$.

### 13. «Доведення нерівності»

Для довільного натурального $n \geqslant 2$ доведіть, що

$$\sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} - \ldots + \sqrt{\frac{4n-3}{n}} - \sqrt{\frac{4n-2}{n}} + \sqrt{\frac{4n-1}{n}} > 1.$$

### 14. «Знову відновлюємо трикутник»

За допомогою лише циркуля та лінійки відновіть трикутник $ABC$ за такими трьома точками: точкою $M$ перетину його медіан, точкою $I$ — центром його вписаного кола і точкою $Q_a$ дотику вписаного кола до сторони $BC$.

### 15. «Трикутник з кутом $120^\circ$»

Дано нерівнобедрений трикутник $ABC$, в якому $\angle A = 120^\circ$. Нехай $AL$ — його бісектриса, $AK$ — медіана, проведені з вершини $A$, точка $O$ — центр описаного кола цього трикутника, $F$ — точка перетину прямих $OL$ і $AK$. Доведіть, що $\angle BFC = 60^\circ$.

### 16. «Буратіно та музичне казино»

На Полі Чудес у Країні Дурнів Буратіно заробив 2016 золотих і вирішив запросити до корчми «Три пічкурі» своїх давніх знайомих — Карабаса Барабаса й Дуремара. Карабас Барабас запропонував йому зіграти в музичне казино з виконанням $N$ пісень. Перед кожною з пісень Буратіно ставить якусь кількість золотих на кін і намагається вголос угадати, хто заспіває наступну пісню: Карабас Барабас або ж Дуремар (обидва вони чують прогноз Буратіно і після цього обирають, хто саме буде співати). Якщо Буратіно вгадує, то поставлена сума подвоюється і повертається Буратіно. В іншому випадку Карабас Барабас та Дуремар залишають її собі. Умовою гри передбачено, що Дуремар співатиме більше пісень, аніж Карабас Барабас. Який найбільший гарантований виграш може забезпечити собі Буратіно, якщо:

*а*) $N = 3$;

*б*) $N = 5$?

### 17. «Числові набори»

Нехай $a > 1$. Маємо набір з $n$ чисел: $a^0$, $a^1$, ... , $a^{n-1}$. Дослідіть можливість розбити цей набір на $m$ частин так, щоб суми чисел у будь-яких двох з них відрізнялись не більше, ніж на $q$. Наприклад, для $m = 2$, $m = 3$ в першу чергу пропонується розглянути значення $n$, «близькі» до 100, і значення $q$, «близькі» до 1.

### 18. «Збіжність послідовності»

Нехай $m \geqslant 2$ — задане натуральне число. Послідовність невід'ємних дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є такою, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+m} \leqslant \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m-1}}{m}.$$

Доведіть, що ця послідовність має скінченну границю.

## 19. «Турнір претендентів»

*а*) У турнірі претендентів на світову першість з шахів змагалися 5 гросмейстерів: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. Турнір проходив у декілька кіл (кожен з кожним зіграв одну й ту саму кількість партій). Відомо, що всі учасники набрали різну кількість очок і за кількістю очок розташувалися в порядку **ABCDE** (за перемогу нараховується 1 очко, за нічию — $1/2$, за поразку — 0). Відомо також, що за кількістю здобутих перемог вони розташувалися в зворотному порядку **EDCBA**, тобто найбільшу кількість перемог здобув **E**, гросмейстер **D** здобув перемог менше за **E**, проте більше за **C**, і т. д. Доведіть, що не менше від 15 партій завершилися внічию.

*б*) Для яких $n$ могла б виникнути аналогічна ситуація в турнірі, в якому в декілька кіл змагалися $n$ шахістів? Для таких $n$ визначте: 1) мінімальну кількість зіграних унічию партій; 2) мінімальну кількість кіл; 3) мінімальну кількість перемог.

## 20. «Бінарні таблиці та ймовірність»

Квадратну числову таблицю, у кожній клітинці якої записано або число 0, або число 1, назвемо *бінарною*. Для натурального $n \geqslant 2$ позначимо через $\mathcal{T}_n$ сукупність усіх бінарних таблиць $m \times m$, $m = 2, 3, \ldots, n$.

20.1. Знайдіть імовірність $p_n$ того, що навмання обрана в сукупності $\mathcal{T}_n$ бінарна таблиця не має ані двох однакових рядків, ані двох однакових стовпчиків.

20.2. Обчисліть $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

* * *

**Матеріали для проведення відбіркових етапів турніру підготували:**

І. Г. Величко, О. В. Величко, В. М. Журавльов, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, М. П. Мороз, Д. П. Мисак, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, П. І. Самовол, О. К. Толпиго, І. В. Федак, В. Д. Федачківський, Д. І. Хілько, $\boxed{\text{В. А. Ясінський}}$.